

Appendix PID 制御の基礎理論

開ループ制御と閉ループ制御(フィードバック制御)

図Aに示す恒温オイル槽と図Bに示す電子冷却槽の温度制御基本システムの入出力特性は次の式で示すことが出来ます。

$$T = aM \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \dots\dots(1)$$

ここで、 T は槽温度、 M はヒーターへの操作量、 τ は熱時定数、 a は比例定数です。

また、この系の熱容量を C 、熱抵抗を R で表すと熱時定数は $\tau = CR$ となるので、(1)式は

$$T = aM \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \dots\dots(2)$$

となります。すなわち、(2)式で示す熱現象はコンデンサ C 、抵抗 R からなる積分回路における入力電圧 aM に対する出力電圧 T の関係として等価的に表す事が出来ます。この等価回路と応答特性を図Cに示します。

(2)式により $t \rightarrow \infty$ では

$$T = aM \dots\dots(3)$$

となるので、操作量 M により制御出力の温度 T が一義的に決まります。この単純な制御を開ループ制御(図D)と言います。しかし、図Cの等価回路は完全断熱という理想状態を前提とするものであり、実際の等価回路と応答性は外界からの外乱を考慮した図Eのようになります。この場合は外乱の影響による制御出力の温度 T の変動を抑えるため温度 T を検出し、その値を制御装置にフィードバックする必要があるため、図Fのフィードバック制御を(閉ループ制御)構成します。図A,Bの制御システムはこの閉ループ制御に相当します。

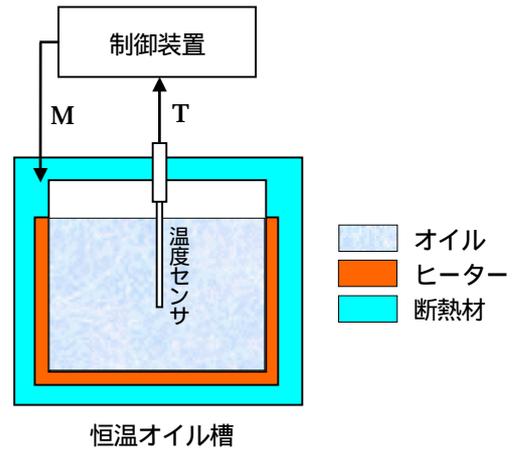
図A,Bの温度制御の場合、外乱とは環境温度 Te の変動であり、槽とは熱抵抗 R' で結合しているとし、温度センサも入れた検出装置と制御装置の応答の遅れ時間を t_d とすると、制御出力の温度 T は(2)式に代わり、

$$T = aM \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{CR}} \right) + Te \left(1 - e^{-\frac{t}{CR'}} \right) \dots\dots(4)$$

で表すことが出来ます。断熱が十分に行われていると仮定すると、 $R \ll R'$ となるので、マクローリン展開により(4)式は

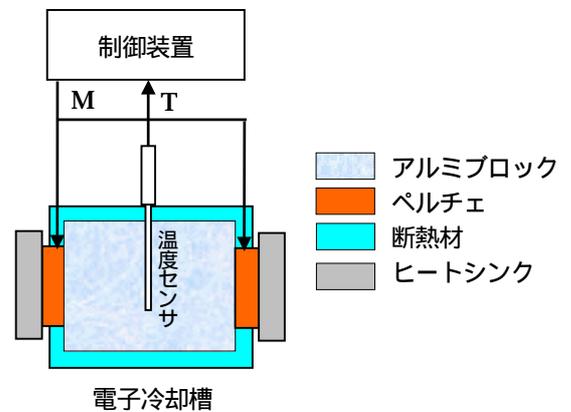
$$T \approx aM \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{CR}} \right) + Te \frac{t}{CR'} \dots\dots(5)$$

となります。断熱が十分に行われている場合、熱時定数 $\tau' = CR'$ は非常に大きいので、環境温度 Te が安定している場合では(5)式の右辺の2項は一定の定数 SE と見なす



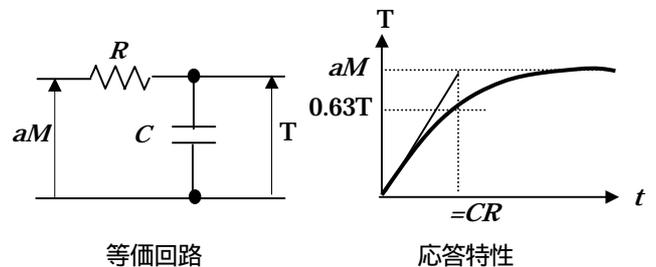
恒温オイル槽

図A 恒温オイル槽の制御の基本システム



電子冷却槽

図B 電子冷却槽の制御の基本システム



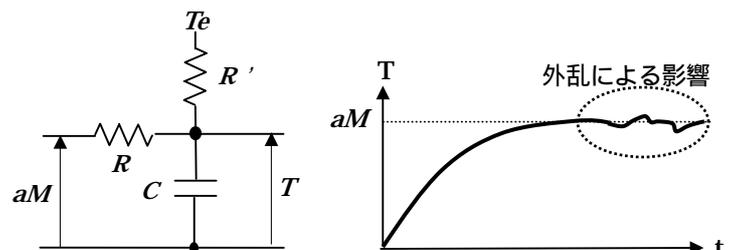
等価回路

応答特性

図C 熱現象の電気的基本モデル



図D 開ループ制御



図E 外界の変動を考慮した等価回路と応答特性

Appendix PID 制御の基礎理論

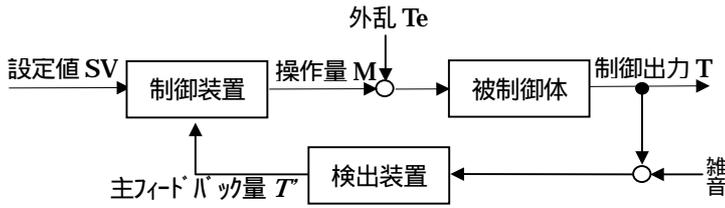


図 F 外乱を考慮した閉ループ制御

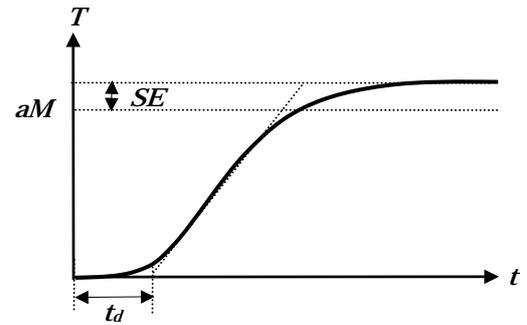


図 G 時間遅れとオフセットを考慮した応答特性

ことが出来ます。すなわち、

$$T \approx aM \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{CR}} \right) + SE \quad \dots\dots(6)$$

となります。この場合の応答特性は図 C のそれに時間遅れ t_d とオフセット SE が付加された図 G のようになります。

断熱が十分に行われる場合の系の入出力特性は(6)式で近似することが出来ましたが、断熱が不十分であると図 H のような共振現象が出現し、制御出力の温度 T が非常に不安定になります。更に、断熱が不十分になるとほとんど制御不能のカオス状態が出現しますので、断熱対策を十分に行うことは非常に重要です。

ON/OFF 制御

最も単純な制御方式として、リレーなどによりヒーターやペルチェ電流を ON/OFF する ON/OFF 制御があります。制御する最高温度を T_{MAX} とすると、必要とする最大操作量 M_{MAX} は(3)式より

$$M_{MAX} = T_{MAX} / a \quad \dots\dots(7)$$

となります。ON/OFF 制御するための操作量 M_i は M_{MAX} より大きい値が必要となります。この場合の温度変化を図 I に示します。最初、ON 状態で設定温度まで上昇し、その後は ON/OFF 動作を繰り返します。その動作の詳細を図 J に示します。と t_d による ON/OFF の時間遅れによりハンチング現象が生じますので、温度 T は設定値を中心にオーバーシュートとアンダーシュートを繰り返します。この現象は CR による充放電を繰り返す発振現象とおなじです。

操作量 M_i を大きくすると初期応答特性時間が小さくなりますが、ON/OFF 動作時の温度変動幅が大きくなりますので、操作量 M_i を大きくし過ぎないように注意する必要があります。

時間遅れが小さい制御系では図 K で示すように温度 T の変動量を小さく抑えることが出来ますが、例えば、検出装置の分解能と応答速度を上げて時間 t_d を小さくすると雑音の影響が大きくなり、場合によっては制御系の安定性を著しく損なう結果になる可能性があるため、十分に注意する必要があります。

温度制御の多くの場合、熱時定数が大きい場合時間遅れを小さくすることが出来ない場合が多く、この場合、ON/OFF タイミングを設定値に対して少しずらして、見かけ上、時間遅れを小さくする方法もありますが、同様に制御系の安定性を損なう結果になる可能性があります。

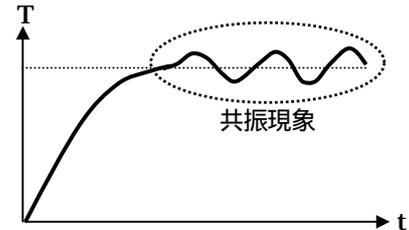


図 H 共振現象の出現

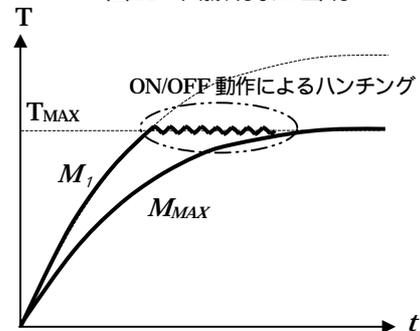


図 I ON/OFF 制御における応答特性

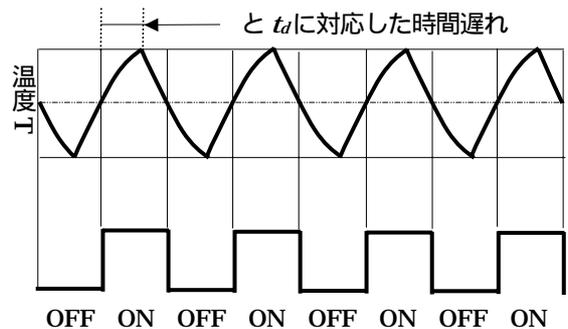


図 J ON/OFF 制御によるハンチング現象

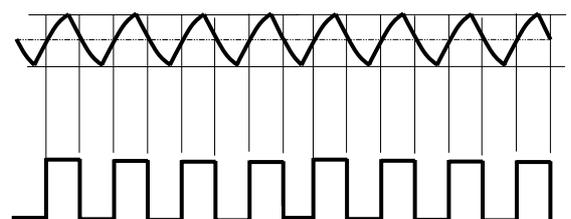


図 K 時間遅れが小さい場合の ON/OFF 制御

Appendix PID 制御の基礎理論

PID 制御

P 制御 (比例制御)

(3)式に従い設定温度 T_{SV} に対して操作量 M を決める開ループ制御の場合、次の幾つかの問題点があります。

- ・ 外乱による影響(誤差)を受ける。
- ・ 設定温度 T_{SV} に達するまで(熱平衡状態)、時間がかかる。
- ・ (3)式の関係性を予め知っている必要がある。
- ・ (3)式の a が定数とは限らない。

このような開ループ制御の問題点を解決するため、図 L のような閉ループ制御を行います。すなわち、最初、操作量 M を最大 M_1 にします。そして設定温度 T_{SV} に対する偏差 T を測定しながら偏差がある一定の値 T_p に達すると、偏差 T に対応して操作量 M を徐々に小さくし、最終的には設定温度 T_{SV} に対応した操作量 M_{SV} になります。但し、実際の制御においては熱時定数などによる時間遅れにより、図 M のようなオーバーシュートとアンダーシュートを繰返しながらハンチング幅が減衰していく初期現象が生じます。

すなわち、操作量 M は次に式で示すことができます。

$$M = K_p \Delta T + M_{SV} \quad \dots\dots(8)$$

K_p を比例ゲインと言い、操作量 M は偏差に比例するので P(Proportional)制御と言います。また、操作量 M と偏差 T が比例する領域を比例帯と言います。

比例ゲイン K_p を大きくしていくと、比例帯の幅が小さくなり、図 J のようなハンチング現象により温度変動が大きくなります。(K_p では ON/OFF 制御と同じ) 逆に K_p を小さくしていくと、比例帯の幅が大きくなり、温度変動の幅は小さくなりますが、オフセットが大きくなります。($K_p = 0$ では $M=M_{SV}$ 、つまり一定の操作量での制御)

I 制御

図 A,B の制御システムでは完全断熱ではないため、外界の温度変動の影響を受けます。それは大きな熱時定数を持って影響しますので、時間的遅れにより少しずつ制御システムに偏差 T を与えます。つまり、過去からの時間的蓄積に対応した偏差 T を与えます。オフセットがゆっくりと変動ような現象となって現れます。よって、次のような偏差 T の積分に比例した操作を行うことにより、このようなオフセットをキャンセルします。

$$M = K_I \int \Delta T \quad \dots\dots(9)$$

この制御を I(Integral)制御と言います。I 制御を単独で用いることはなく、P 制御と組合せて用いることが多く、これを PI 制御と言います。

D 制御

例えば、電気的ノイズによる影響は急激な偏差 T を発生させます。このような急激な変動に対して速やかに制御するため、次のような偏差 T の微分に対応した制御を行います。

$$M = K_D \frac{d\Delta T}{dt} \quad \dots\dots(10)$$

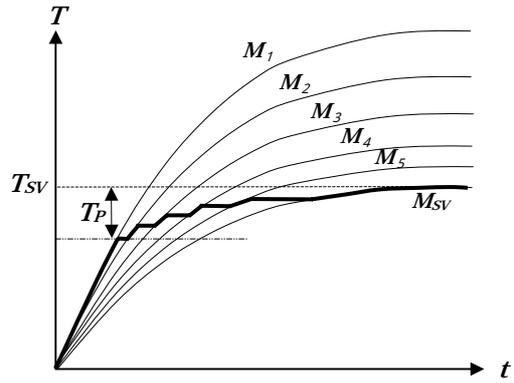


図 L 比例制御の模式図

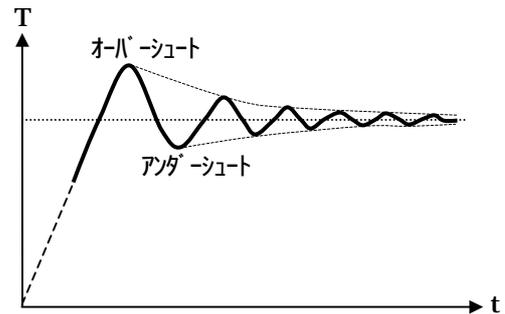


図 M ハンチング現象

この制御を D(Derivative)制御と言います。I 制御と同様に I 制御を単独で用いることはありません。

PID 制御

比例、積分、微分制御を組合せたものを PID 制御と言います。操作量は次に式で示されます。

$$M = K_p \Delta T + K_I \int \Delta T + K_D \frac{d\Delta T}{dt} + M_{SV} \quad \dots(11)$$

$K_p / K_I = T_I$ (積分時間)、 $K_D / K_p = T_D$ (微分時間) とすると、(11)式は

$$M = K_p \left(\Delta T + \frac{1}{T_I} \int \Delta T dt + T_D \frac{d\Delta T}{dt} \right) \quad \dots(12)$$

となります。微分すると

$$\frac{dM}{dt} = K_p \left(\frac{d\Delta T}{dt} + \frac{1}{T_I} \Delta T + T_D \frac{d}{dt} \left(\frac{d\Delta T}{dt} \right) \right) \quad \dots(13)$$

となります。

更に、差分形で表すと

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = K_p \left(\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta t} + \frac{1}{T_I} (\Delta T) + T_D \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta t} \right) \right)$$

よって、

$$\Delta M = K_p \left(\Delta(\Delta T) + \frac{\Delta t}{T_I} \Delta T + \frac{T_D}{\Delta t} \Delta(\Delta(\Delta T)) \right)$$

Appendix PID 制御の基礎理論

現在の偏差を ΔT_n 、前回の偏差を ΔT_{n-1} 、前々回の偏差を

ΔT_{n-2} とすると、

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta T) &= \Delta T_n - \Delta T_{n-1} \\ \Delta(\Delta(\Delta T)) &= \Delta(\Delta T)_n - \Delta(\Delta T)_{n-1} \\ &= (\Delta T_n - \Delta T_{n-1}) - (\Delta T_{n-1} - \Delta T_{n-2})\end{aligned}$$

また、

$$\Delta t \Rightarrow T_s \text{ (サンプリング時間)}$$

とすると、n 時点での操作量の変位量は

$$\Delta M_n = K_p \left(\Delta T_n - \Delta T_{n-1} + \frac{T_s}{T_i} \Delta T_n + \frac{T_D}{T_s} (\Delta T_n - 2\Delta T_{n-1} + \Delta T_{n-2}) \right)$$

-----(14)

となります。この式を用いて PID 制御の実際の演算処理を行います。

参考文献

- 齋藤満、内藤秀春；トランジスタ技術 SPECIAL No.53 温度計測・制御の事例研究、CQ 出版社
 広井和男、宮田朗；シミュレーションで学ぶ自動制御技術、CQ 出版社
 白田昭司；PID 制御再入門、日刊工業新聞社
 山本重彦、加藤尚武；PID 制御の基礎と応用、朝倉書店
 大橋力；情報環境学、朝倉書店