

# 科学理論におけるモデル化とマクスウエルの電磁理論について

## 概 論

- 科学理論とは、実世界に対し観察、推論・仮説を繰り返すことにより、観察した実世界の対象がどのようなメカニズムで機能しているかを説明する知識体系である。
- しかし、実世界は非常に複雑であり実世界の全てを1つの科学理論で説明することは不可能。よって、実世界の観察対象を限定し、単純化(線形化、独立変数化など)することにより科学理論の構築を行う。これをモデル化と言う。即ち、モデル化により構築された科学理論が示す世界は実世界と完全に一致するものではない。
- 実世界のある現象に対応したモデル化が複数存在する場合もあり、どのモデル化が実世界の現象をより良く説明しているかは実測した結果により判断することが出来るが、理論体系自身ではそれを説明することは出来ない。
- マクスウエルの電磁理論は4つの公理からなる論理体系を形成しアンペアの法則に変位電流を追加( $\text{rot } H = i + \varepsilon \partial E / \partial t$ ) することにより電磁波の存在を予想し、ヘルツがそれを実証した。
- マクスウエルは最初に変位電流の存在を真空中の渦管と荷電粒子のモデルにより説明し、次にエーテル中に変位電流が存在するモデルにより説明したが、それらのモデルは現在に至っても実証されていない。
- 公理の一つである( $\text{rot } H = i + \varepsilon \partial E / \partial t$ ) は変位電流の存在を前提としなくても、電荷の保存則(電流の連続性)を前提とするモデル化とFaradayの電気と磁気の対称性の概念によるモデル化により導くことも可能である。
- 量子論につながるプランクの熱放射の式(実験式)やアインシュタインの光量子化説につながる光電効果、そして原子内の電子軌道の安定性など、これらの現象を説明することが出来ず、マクスウエルの電磁理論(モデル化)の限界性が示された。

## マクスウエルによる電磁理論の公理の修正と電磁波の予言

### 実験結果により導かれた基本法則(公理)

$$\begin{array}{ll} \text{div } E = \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{クーロンの法則 (ガウスの定理)} \\ \text{div } H = 0 & \text{単磁荷は存在せず} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} & \text{ファラデーの電磁誘導} \\ \text{rot } H = i & \text{アンペアの法則} \end{array}$$

### マクスウエルにより修正された基本法則(公理)

$$\begin{array}{ll} \text{div } E = \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{div } H = 0 & \text{rot } H = i + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{array}$$

← 修正箇所

※表現の簡素化のため D,B(電束、磁束密度)を用いず E,H(電場、磁場の強さ)のみで表記

### この修正により波動方程式が成立(電磁波の予言)

$$\nabla^2 E = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 H = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \because C = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(理論上の電磁波の速度) = (実測による光の速度)

光は電磁波である

## マクスウェルの分子渦と荷電粒子のモデルによる変位電流の導入

ファラデーの磁力線に関する考えに基づきマクスウェルは論文「物理的力線について」において

磁場においては何か回転していると推測



流体中の回転する渦からの類推と転がり軸受からの類推により

分子渦(セル)とその間にある荷電粒子(ビーズ)からなるモデルを提案



回転力が異なるセル間のビーズは動くが、セルとビーズに弾性が働くと動かず、ビーズを動かそうとする力が取り除かれると、弾性によりビーズが変位すると考え

真空中のビーズの変位による変位電流の存在を仮定

$$\text{電気変位 } \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow \text{変位電流 } i_d = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$



次にマクスウェルは論文「電磁場の力学的理論」において、セルとビーズのモデルは数学的説明を確立するための手段にすぎないため、このモデルを捨て去り、

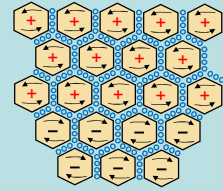
エーテル中に変位電流が流れると考えた



しかし、マイケルソン・モーレーの実験結果とこれに基づくアインシュタインの特殊相対性理論によりエーテルの存在は否定された。



電場の時間的変化より磁場が生じるだけで変位電流は存在しないと考えることもでき、また、真空中の荷電の変位による変位電流が存在するモデルを仮定することもできるが、このモデルにおいては、真空中の分極の存在を実証する必要がある



マクスウェルによるセルとビーズによるモデル

## 電荷の保存則と電流の連続則を前提とする論理体系から変位電流を導入

変位電流の存在を前提とすると電荷の保存則・電流の連続則を導くことができるが、逆に、電荷の保存則・電流の連続則の存在を前提とする。

電流の連続則により、電線の任意の箇所を取り囲む閉曲面から湧き出ていく電流の総和はゼロであるので、

$$\text{div } i = 0$$

その閉曲面内に電荷 $q$ が存在する場合は

$$\text{div } i = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

が成立する。これを電荷の保存則と言う。

また、

$$\text{div } E = \frac{q}{\epsilon}$$

であるので

$$\text{div} \left( i + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

が成立する。電荷 $q$ が存在する閉曲面についても電流の連続則が成立するモデルでは

上式第2項も電流を表すことになり、

$$i_d = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

も電流を表し、これをお変位電流と言う。よって、アンペアの法則の電流項を次のように変更する。

$$\text{curl } H = i + i_d = i + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

## ファラディの電場と磁場の対称性の概念を前提とすると

電場と磁場との間には対称性が成立し、電場と磁場は波のように振動しているという  
ファラディのモデルが成立すつとすれば、

電荷 $q$ 、電流 $i$ が存在しない空間の電磁場をアンペアの法則の修正項が存在しない場合  
電磁場は次に式で表される。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 0 & \operatorname{rot} E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H &= 0 & \operatorname{curl} H &= 0 \end{aligned}$$

しかし、これらの4つの式では電場と磁場の対称性が成立しておらず、  
ファラディの電場と磁場の対称性が成立するために次のように修正する。

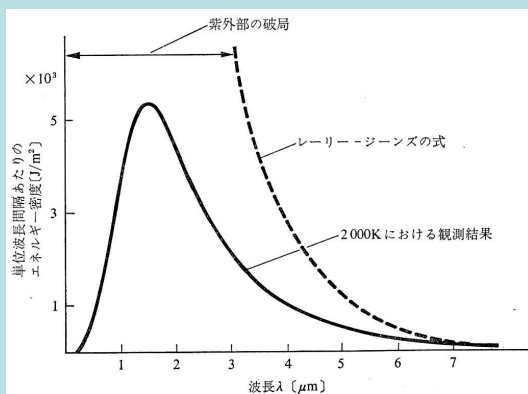
$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 0 & \operatorname{rot} E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H &= 0 & \operatorname{rot} H &= \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

よって、電荷 $q$ 、電流 $i$ が存在する場合における電磁場は次に式で表される。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{q}{\varepsilon_0} & \operatorname{rot} E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H &= 0 & \operatorname{rot} H &= i + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

## レーリー・ジーンズの式(1900)

レーリー・ジーンズの式とは分子運動論と電磁気学から導いた  
ある温度から放射される電磁波のスペクトル強度分布のことで、  
レーリー卿が1900年に最初に発表した。その後、1905年にジェームズ・  
ジーンズが係数に誤りがあることを指摘した。



温度 $T$ の物体から放射される波長 $\lambda$ のエネルギー密度は

$$u_\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

であり、波長が

$\lambda \rightarrow 0$ では、

エネルギーは

$u_\lambda \rightarrow \infty$ となり、

**実験事実と矛盾する。**

## レーリー・ジーンズの式の破局の意味すること

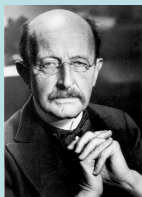
レーリー・ジーンズの理論においては、次のことを前提に構築されていた。

- ・ 空洞内に存在する マックスウエルの電磁波の定常波の波長分布を幾何学的に求める。
- ・ 熱力学とニュートン力学からなる分子運動論により、定常波のエネルギーを求める。



**ニュートン力学も熱力学も、そして電磁波理論も(⇒古典物理学)  
間違っている可能性が生じた。**

## プランクのエネルギー量子化仮説(1900)



M. Planck,  
1858- 1947

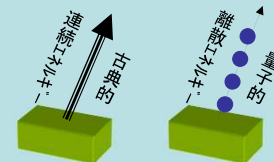
小さい波長領域でも**実験と良く合う**次の式をプランクは導入した。

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \quad \Rightarrow \quad u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^4} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}$$

**実験式であって理論式でない**

レーリー・ジーンズの理論が破綻した原因は、空洞の中に存在する電磁波の周波数が増えたとその量も増えることによる。

プランクは周波数 $\nu$ の波はエネルギー $h\nu$ の不連続な間隔でしかとることが出来ないと仮定した。

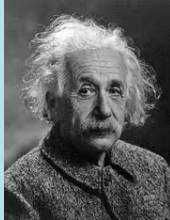


古典的放射

量子的放射

## アインシュタインの光量子仮説(1905年)

1905年、光電効果の実験事実に基づき、アインシュタインはプランクの仮説を  
実体化して光量子仮説を提案した。(エネルギー塊⇒粒子)



Albert Einstein  
1879-1955



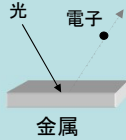
光電管  
WE 3A(1926)

光電効果  
金属に光を照射すると電子が放出される現象

- 光を照射すると**時間遅れなく**電子を放出。
- いくら強い光を当てても**周波数が一定以上**でないと電子が放出されない。

↓

電磁波理論では、電磁波のエネルギーの吸収から電子放出までにある一定以上の時間がかかり、また、電磁波のエネルギーは周波数でなく振幅に対応している。



マックスウェルの電磁理論  
では説明不可能

## ボアの量子条件による原子モデル(1913)

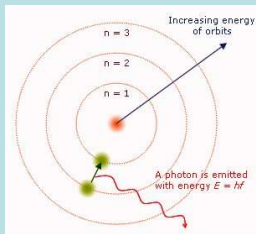


Niels Bohr  
1885-1962

ラザフォードの原子模型の場合、既存の理論で考えると、原子核をまわる電子は電磁波を放出、つまり、エネルギーを減少させながら回転するので、電子は原子核に吸い込まれてしまう。

↓  
マックスウェルの電磁理論では説明不可能

そこで、1913年、ボアはラザフォードの原子模型に量子論の考えを導入し、水素原子のスペクトルを説明するのに成功した。



ボアの仮定1—量子条件

電子は限られた軌道のみが許され、その軌道においては安定しており、電磁波は放射されない。

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

ボアの仮定2—周波数条件

1つの安定軌道から他の安定軌道に移るときのみ電磁波を放射・吸収し、その周波数は次の式に従う。

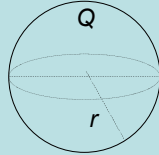
$$hf = W_i - W_j$$

参考資料

電荷の持つエネルギーは何処に存在するか？

電荷Qを持つ半径rの導体球の電氣的エネルギーをクーロンの法則に従って求めると

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2}$$



ニュートン力学同様に遠隔作用の考え方に従うと、この電氣的エネルギーは導体球にあると考える。



電場Eが存在するとする近接作用の考えに従うと、電場Eはエネルギーを持たなければならない、この電氣的エネルギーは導体球ではなく、電場にあると考える。

電場のエネルギー密度が  $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$  であるので

$$U = \int_r^\infty \frac{1}{2}\epsilon E^2 4\pi r^3 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2}$$

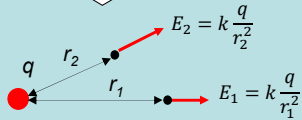
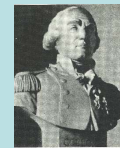
※ 物理的に存在するという事はエネルギーを持つということ

マックスウエルの考えを理解しよう！

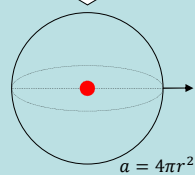
クーロンの法則(1785)からガウスの定理へ(場の概念による表現)



距離rの電荷q1,q2に働く力F1,F2



クーロンの法則から単位電荷に働く力を電場の強さEとして定義し、その電場はいたる所の空間に存在すると考える。



ガウスの定理

$$E_{(r)} = k \frac{q}{r^2} \Rightarrow \oint_a E da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div} E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

電荷qを囲む表面のから湧出てくる電場Eの総和

電荷qに比例する

### 磁場についての表現

磁場についても、電場同様クーロンの法則が成立とし、磁場の強さ $H$ を定義。  
しかし、実際は単磁荷は存在せず、磁気双極子の状態のみで存在する。

$H_{(r)} = k' \frac{(m^+ + m^-)}{r^2} \Rightarrow \text{div} H = 0 \dots (2)$

$a = 4\pi r^2$

磁気双極子を囲む表面のから湧出てくる磁場 $H$ の総和はゼロ

### ファラデーの電磁誘導を表現すると

$V = \oint_l E dl = - \frac{d(\int_s \mu H ds)}{dt} \Rightarrow \text{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \dots (3)$

起電力 $V$ 、すなわちコイルの円周上 $l$ の電場 $E$ の総和

コイルの断面 $S$ を単位時間当りに横切る磁場 $H$ に比例

# アンペアの法則の表現は

